Concours Blanc de Mathématiques – MPSI

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées. Le sujet comporte 6 pages.
Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ± 1 point. Il n'est pas attendu que vous arrivez au bout du sujet. La difficulté des parties est (plus ou moins) graduelle. Vous pouvez admettre les résultats de certaines questions pour traiter les suivantes.

Problème d'Analyse – Fonction ζ de Riemann

Dans ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f. Par convention, $f^{(0)} = f$.

Partie A

Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$. On note

$$S_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$$

Dans cette partie, on étudie la convergence de la suite $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1) Montrer que la suite $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \frac{1}{k^p}$$

En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$S_n^{(p)} - 1 \leq \int_1^{n} \frac{1}{x^p}\,dx \leq S_{n-1}^{(p)}$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) En calculant I_n, démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $p \geq 2$ et déterminer sa limite en cas de convergence.

5) Montrer que la suite $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $p \geq 2$.

Dans la suite du problème, on note $\zeta(p) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(p)}$ pour tout entier $p \geq 2$.

Partie B – Calcul de $\zeta(2)$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$, et on définit la fonction φ sur $[0,\pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in]0,\pi[\quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

6) Montrer que la fonction φ est continue sur $[0,\pi]$.

7) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et déterminer un équivalent de $\varphi'(t)$ lorsque t tend vers 0 (on sous-entendra que t est différent de 0).

8) En déduire que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

9) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}$$

10) On note $\Delta :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout t dans $]0,\pi[$ par $\Delta(t) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \dfrac{1}{2}$.
Démontrer que, pour tout $t \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \Delta(t)$$

11) Montrer que Δ se prolonge en une fonction continue en 0 et en π et donner les valeurs de $\Delta(0)$ et $\Delta(\pi)$.

12) Soit ψ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

a) Justifier que ψ et ψ' sont bornées sur $[0,\pi]$. On notera $M = \max\limits_{[0,\pi]} |\psi|$ et $M' = \max\limits_{[0,\pi]} |\psi'|$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_0^\pi \psi(t) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt \right| \leq \frac{2M+\pi M'}{n+\frac{1}{2}}$$

c) En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^\pi \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

13) On rappelle que $\zeta(2) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Démontrer que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie C – Irrationnalité de π

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

14) Déterminer $f_n^{(2n+2)}$.

15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$${f_n}'(x) = (1-2x)f_{n-1}(x)$$

b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_n^{(k+1)}(x) = (1-2x)f_{n-1}^{(k)}(x) - 2k f_{n-1}^{(k-1)}(x)$$

c) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

d) En déduire que $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Indication : on pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$.

16) On veut montrer que π^2 est irrationnel en raisonnant par l'absurde. On suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers naturels non nuls. On pose :

$$F_n(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$g_n(x) = {F_n}'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x) \quad \text{et} \quad A_n = \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\,dx$$

Montrer que ${g_n}'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$, et que A_n est un entier.

17) On pose $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

a) Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$$

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang, puis démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

b) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \qquad \frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{3}$$

c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$$

d) Montrer alors que, pour tout entier $n \geq n_0$, $A_n \in]0,1[$.

e) En déduire que π^2 est irrationnel.

f) Comment peut-on en déduire que π est irrationnel ?

Problème d'Algèbre – Endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on se propose d'étudier les solutions de l'équation matricielle

$$M^2 = A$$

Dans un premier temps, on étudiera deux exemples, puis dans un second temps on démontrera quelques résultats plus généraux. Les trois premières parties sont indépendantes, on peut admettre les résultats des parties précédentes pour traiter la dernière.

Pour tout espace vectoriel E, on notera 0_E le vecteur nul de E, Id_E le morphisme identité de E et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Enfin, on adoptera la notation multiplicative pour la composition d'endomorphismes.

Partie I : le cas $A = I_2$

1) Soit $E = \mathbb{C}^2$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et h un endomorphisme de E vérifiant $h^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$. Que peut-on dire sur h ?

2) En déduire que l'équation $M^2 = I_2$ possède une infinité de solutions.

3) Donner 2 solutions distinctes de $M^2 = I_2$, dont au moins une ne sera pas une matrice diagonale. On précisera les éléments caractéristiques de l'endomorphisme associé à la solution non diagonale.

Partie II : Un second exemple

Pour cette partie, on note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $E = \mathbb{C}^2$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Enfin, on note f l'endomorphisme de E canoniquement associé à A et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$f_\lambda = f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$$

4) Donner la matrice de f_λ dans la base $\mathcal{B}_c$.

5) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de λ, l'application f_λ n'est pas injective.

6) Donner une base de $F_1 = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$ et une base de $F_4 = \mathrm{Ker}\,(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$.

7) Montrer que F_1 et F_4 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^2$ supplémentaires. On donnera une base adaptée $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_4)$ à ces deux sous-espaces vectoriels, la première composante de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}'$ devra être égale à 1.

8) Déterminer les deux matrices de changement de bases associées à $\mathcal{B}'$ et à la base canonique.

9) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, qu'on notera A'.

10) On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes g de $\mathbb{C}^2$ qui commutent avec f. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$.

11) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Soit $k \in \{1, 4\}$, montrer que F_k est stable par g (c'est-à-dire $g(F_k) \subset F_k$).

12) Soit M une solution de l'équation $M^2 = A$ et h l'endomorphisme canoniquement associé à M. On a donc $h^2 = f$.

a) Justifier que h commute avec f.

b) Pour $k \in \{1, 4\}$, déterminer les valeurs possibles de $h(e'_k)$. On devra se limiter à un nombre fini de valeurs pour chaque k.

c) On note M' la matrice de h dans la base $\mathcal{B}'$. Quelles sont les valeurs possibles pour la matrice M' ?

13) Montrer que l'équation $M^2 = A$ possède un nombre fini de solutions que l'on explicitera.

Partie III : Matrices nilpotentes

On note ici $E = \mathbb{C}^n$. On rappelle qu'un endomorphisme f de E est *nilpotent*, si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence* de f le plus petit entier p tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
De même, on dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *nilpotente*, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence* de A le plus petit entier p tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

14) Justifier que si f est endomorphisme de E nilpotent d'indice p, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Pour un tel x_0, montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.

15) En déduire une inégalité entre l'indice de nilpotence p d'un endomorphisme et la dimension n de l'espace E.

16) On suppose que A est une matrice carrée d'ordre n nilpotente d'indice p avec $p > \dfrac{n+1}{2}$. Montrer que l'équation $M^2 = A$ n'a pas de solution.

Partie IV : Matrices de rang 1

On note encore $E = \mathbb{C}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1, on notera f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. On se propose de démontrer que $M^2 = A$ a une solution si et seulement si $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) = \{0_E\}$.

17) On suppose que $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) = \{0_E\}$.

a) Justifier que $\mathrm{Im}(f_A)$ et $\mathrm{Ker}\,(f_A)$ sont supplémentaires.

b) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f_A)$ est stable par f_A.

c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f_A est représentée la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec a un complexe non nul.

d) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{C}^n$ tel que $h^2 = f_A$.

18) On suppose maintenant que $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) \neq \{0_E\}$ et qu'il existe une matrice M telle que $M^2 = A$. On notera h l'endomorphisme canoniquement associé à M. On a donc $f_A = h^2$.

a) Justifier que $\mathrm{Im}(f_A) \subset \mathrm{Ker}\,(f_A)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(f_A)$ est stable par h. Dans la suite, on notera $\widetilde{h} : \mathrm{Im}\,(f_A) \to \mathrm{Im}\,(f_A)$ l'endomorphisme obtenu en prenant la restriction et la corestriction de h à $\mathrm{Im}\,(f_A)$.

c) Montrer que $\widetilde{h}$ est nilpotent d'indice supérieur ou égal à 3.

d) Conclure.

19) Conclure.

Mathematics is hard... 15 + 15 is thirty, but 16 + 16 is thirty too.